私の数学教育研究

高等学校　テクノロジー活用と共に「現物」を取り入れる良さ

石　谷　優　行 ※

要　　約

本稿のねらいは，高等学校図形領域授業において，テクノロジー活用に「現物」を取り入れることの良さを論じるものである．現行学習指導要領では，数学的活動の実践が日々の授業において求められている．筆者は２０年ほど前より，ソフト「ＧＲＡＰＥＳ」などにより主に関数の領域において動的シミュレーションを授業に取り入れた研究を行い，発表を続けてきた．しかし，５～６年前，同様の形で図形領域にテクノロジーを活用したところ，生徒たちの感動的な反応がほとんどなく，その原因を探った．その後，授業実践を重ね，テクノロジー活用と共に「現物」を取り入れることの良さに気づいた．

キーワード：テクノロジー　図形領域　現物　数学的活動

１．はじめに

筆者はテクノロジー活用に関して，ここ２０年に渡り，実践し発表を行ってきた．しかし垣花(2007)が「学校現場では一部の先生だけが実践し，あるいは研究授業だけの実践で終わり，日常の算数，数学の授業にはほとんど利用されていない．」と述べているように，現場におけるテクノロジー活用は，神奈川県教科研究会数学部会の中でも筆者以外，ほとんど報告が無いのが実状である．

現場，特に附属校以外の一般校での多くの先生方は，数学の授業とは教科書を教え，その問題を短時間で解けるようにすることであると考えている傾向がある．また，生徒たちも同様に，教科書を学び，その問題を短時間で解けるようになることが,「数学ができる」ことであると考えている．

また，吉田(2009)が「高等学校では，まだまだコンピュータの活用が浸透していない．設備が整っていないからできないのではなく，活用のニーズがないから設備が整備されないのではないかと思う．コンピュータ活用のよさをもっと財政当局に伝えることが必要ではないか．」と述べている．

本稿では,単にコンピュータ活用に留まらず「現物」を取り入れることで，テクノロジーを用いるだけでは得られない良さを示す．多くの高校現場で活かしていただきたいと希望する．

２．研究のきっかけ

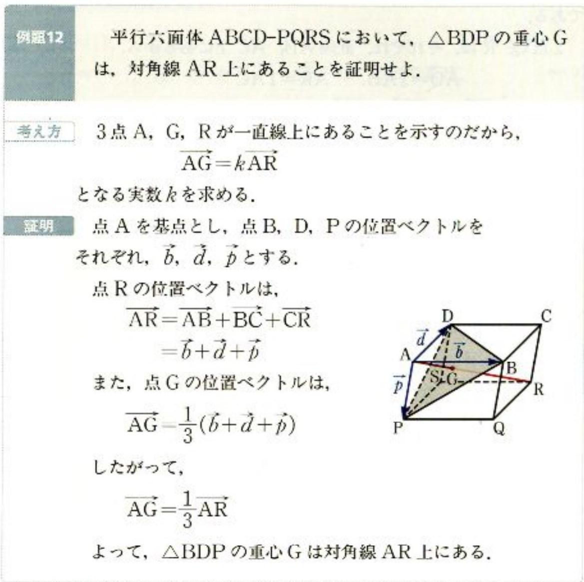
筆者がこの図形領域における研究のきっかけとなったのが,まず以下平面ベクトルの授業である．「△ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを１：２に内分する点をＰ，辺ＡＣの中点をＱ，辺ＢＣを２：１に外分する点をＲとする．このとき，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ．」(高等学校数学Ｂ改訂版 啓林館(数Ｂ 025)P.76例題8)・・①

普通どおり解説し，$\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{PQ}$ を黒板で証明してからソフト「カブリ」による一斉提示により，どんなに三角形を変化させても，３点Ｐ，Ｑ，Ｒが一直線上に並ぶことを示した．「カブリ」を見せたのは初めてであり，ここで関数領域のように生徒たちから感動の声ががをあげるかと思いきや，教室は静まりシーンとしていたのである．

また空間ベクトルの似たような問題のところ，図１でも，通常の解説の後，今度は三次元を表示する「3D-GRAPES」を用いて見せてみても，生徒たちの反応は平面の時とほぼ同じであった．

そこで筆者はさっそく①の授業に関して次の点について，生徒達に聞いてみた．

※ 神奈川県立横浜平沼高等学校



例題12　平行六面体ABCD-PQRSにおいて，△BDPの重心Gは，対角線AR上にあることを証明せよ．

考え方　3点A，G，Rが一直線上にあることを示すのだから，

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AR}$$

となる実数kを求める．

証明　点Aを基点とし，点B，D，Pの位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$とする．

点Rの位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CR}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{p}$$

また，点Gの位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{p})$$

したがって，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}$$

よって，△BDPの重心Gは対角線AR上にある．

▲図１　啓林館　数学Ｂ(025)　P.99　例題12

１．$\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{PQ}$の形を出せばＰ，Ｑ，Ｒが一直線上にならんでいるように感じるか？

２．$\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{PQ}$の数字４の意味を実感できるか？

３．コンピュータの画面を見てもらったが，その印象は？

紙面の関係から全体的な傾向しか載せられないが，１に関しては，ｋ倍という形そのものが一直線を示すものだと「パターン」で記憶している者が多く，その式そのものからは並んでいるようには感じられないとの回答がほとんどであった．２に関しては，問題を解く際に必ず図は描くので４という数字を実感できるという生徒がほとんどであった．３に関しては，「コンピュータの得意な先生だからそう見せるように画面を作ったのでは」という言葉が印象深く，コンピュータで見ても実感は湧かないなどの声が多く寄せられた．

これらのことを通して筆者は「現物」にさわってもらう重要性を考えた．それは，池田他(2011)での研究にも折り紙をはじめとした「手を使っての研究」が様々示されていた．そこから，まず現物の操作を行い，その後ＰＣによる提示や操作を行う研究を考えた．

３．実践授業にて

以下４つの実践を示す．

尚，本実践の１～３は，通常の授業の中で行ったものではない．本校では，スタディショップと呼んでいるが長期休業中に，教員が授業を設定し，興味関心のある生徒に参加して実践してもらったものである．

実践１　段ボール箱による平行六面体作り

2010年12月(冬期休業中)の実践である．

段ボール箱により図１の模型を作ってもらった．この実践では，中にできる△ＤＰＢをいかに作るかに苦労していた．生徒たちは，試行錯誤の後，ようやくここで余弦定理の存在に気づいた．

この実践を通して生徒のひとりが

「昨年，数学Ⅰで三角比を使った式は全く実用性がなく，こんなことをやっても意味がないと思いながら授業を受けていたが，今回実用性を知った．イメージで作るよりも数式(余弦定理)を使って作った方が効率的だった．」と感想を残した．

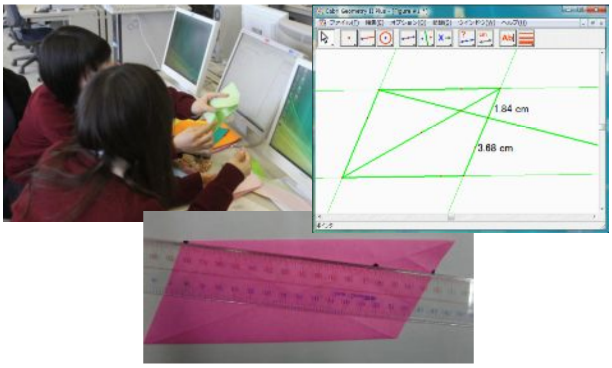
また，「一直線」ということに関して，ある生徒が段ボールの端から対角線上に端を見て，向こう側の端に小さい穴を開け，覗いて光が見えることにも気づいた．「一直線」ということを実際に「光を通す」ということで具現化できていた．

実践２　折り紙による平面ベクトルの実感

2011年12月(冬期休業中)の実践である．

折り紙によりＰ．１の①の例題を実際に折って確かめた実践である．島田(2009)は折り紙の授業に関して「生徒Ａと生徒Ｂの間では，折り方を見せ合うという行為を通してのコミュニケーションが生まれる．」としているが，今回もすぐに折り方の工夫についての対話が生まれた．

また折っていく一つひとつの場面や，最後，カブリを使って確認させた場面なども生徒の顔つきが授業中とは完全に異なっていることを感じた．

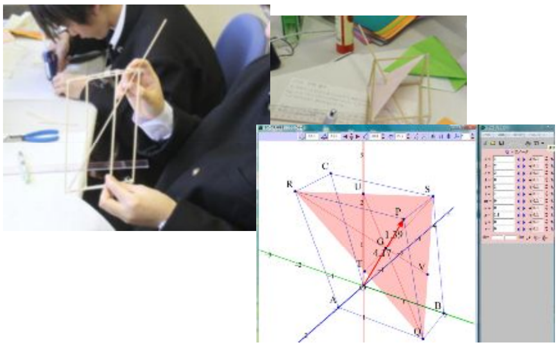


授業の最後に生徒たちから「図形がこうなるのはわかったし証明の必要性もわかるけどなんでベクトルを使って証明しなければならないの？」と問われ「ベクトルでなくてもいいんだよ．座標でやってもいいし，別の方法とかもあるし，今はベクトルで，ということ」と説明した．ある生徒から「数ある証明のひとつで，今はベクトルをやっているってことですね．」と言われ「そうそう，そのとおり．他の証明方法も考えてみてごらん．」と言うと妙に納得した顔をしてくれた．

実践３　竹ひごによる平行六面体作り

2012年12月(冬期休業中)の実践である．

実践１を, 今回は竹ひごを使って実践してみた．



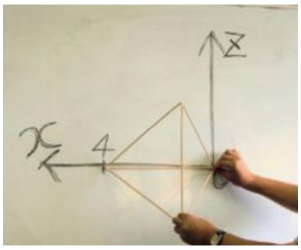
段ボールと違い，竹ひごで実践するメリットはなんと言っても面が透けて全体を通して見えることである．ある生徒の感想であるが「実際の授業で３分の１であると証明されてもなかなかイメージしづらいところがあったので実際に作ってみてイメージしやすくなりました．中学時代から複雑な空間図形を想像するのが苦手だったのでこうやって実物を作ってみると紙に書かれているものと違って３６０°の角度から見ることができて理解しやすくなると思いました．また，コンピュータでは実物を作るのとはまた違って側面などから見ても実物では透けて見えない点や辺まで見える良さがありました．辺の長さなどを自由に変えられるので色々な平行六面体が見られたところもよかったです．」と書かれた．

実践４　放課後の質問

ある日(2013年2月)の放課後，ある生徒が以下の問題を質問に来た．

「正四面体ＯＡＢＣがある．Ｏ(0,0,0)とＡ(4,0,0)として辺ＢＣがｘｙ平面(x>0,y>0)と垂直に交わっているとき，点Ｂ，点Ｃの座標を求めよ．」

本人は放課後，会議等で多忙の私をすぐには見つけられず，別の先生方に紙の上で，いろいろと図を描いて説明を受けていたが，どうも納得できず，ようやく私を見つけた形であった．私はいつも竹ひごで作った「正四面体」を持って授業しているせいか，すかさず黒板にｘ軸とｚ軸を書き，下図のようにその正四面体を置いてみた．



すると悩んでいた生徒の顔が見るみるうちに笑顔になり，「ありがとうございました．他の先生方も，紙に立体の絵を描いて必死に教えてくれたけど，まずその立体が思い浮かばないのに計算方法まで，ばーーーーっと話されて何も理解できませんでした．石谷先生に説明されたときはびっくりするくらい頭の中に立体の中の必要な部分の図形が浮かんできて，計算方法も先生に説明されなくても『あれを使えばいいんだ』ってすぐ解ったし，立体を現物で見るだけでこんなにも見えてくるものがあるんだと驚きました．紙の上だけで立体の問題をやると難しくてつまんないと思っていたけど，同じ問題でも立体を見ながらやるとパズル？？みたいな感じですごく楽しく解けたし，すっきりしました．１回この問題を解いただけでも他の問題の時にも形を想像しやすくなりました．」と感想を残してくれた．最後の「他の問題の時に

も形を想像しやすくなりました.」は「現物」がなくてもイメージをしていく可能性を見いだした言葉と考えることができる.

４.「現物」を取り入れる良さの考察

４つの実践を見ていただいたが，紙面の関係で大幅に内容を圧縮せざるを得なかった．ここで我々，高等学校数学科の教員は生徒たちに何を最も伝え導かねばならないのか，を考えてみたい．それは学習指導要領を踏まえることも含めて「数学的な見方・考え方そのものを身につけさせ，鍛えるべき」と実感する．前述したが，数学的活動の実践が日々の授業において求められている．自身，教員生活３２年目となるが，デジタル機器の普及もあり，ますます生徒たちは手を使って何か「現物」を作ることから遠ざかっている．そして記憶すること，いわゆる解法のパターンを覚えることは結構得意となってきている.ネット上には，質問すれば，すぐに解法を教えてくれるサイトも存在する．しかし授業中など，これまでと変わった問題を出せば，生徒はどこから手を付けて良いのか思考停止となり，帰宅後ネットで質問し解法パターンを覚えるという循環が繰り返される．かつてネットなど無い頃は，ひとつの問題に対して考えに考え，そしてようやく解答にたどり着いたものであった.その解答に至るプロセスにおいて，多くの大切な考え方を自然と身につけ，そして自然と鍛えられていった．数学はなんと泥くさいものだと感じ，力技で解くこともあった．だからこそ「エレガントな解答」を見たときの鮮やかさに，言いしれぬほどの感動を得，心が躍ったものであった．筆者は長年，関数領域において，問題の本質的な意味をわかってもらうため，ＰＣの動的シミュレーションによる授業を行ってきた．数学Ⅰの２次関数のグラフ移動や各パラメータの持つ意味，さらに数学Ⅱでは三角関数の各パラメータの持つ意味や微分のところでの接線など多くの実践である．しかし図形領域においては単にＰＣ等テクノロジーを利用してもそれだけでは，問題の本質的な意味するところにはなかなか届かない．むしろ少しでも「現物」に触れさせることで，こちらが考えもしなかったようなことに出くわす．実践１では,余弦定理の必要性に彼ら自身が気づき，さらに一直線を光として見た．実践２では，他の証明を考えるきっかけを作り，今まで習ってきた初等幾何の意味を手を通して実感できた．実践３では実物とコンピュータ操作の両方の良い点からその相乗効果が表現されている．そして最後の実践４は放課後，私がすぐに見つからなかったために他の先生方の説明が土台となっての現物提示となり，生徒本人の頭の中に問題のイメージでき，まさに「3D-GRAPES」が頭の中に入って自由に動かし考えている様子を見ることができた．筆者は常にＰＣ等テクノロジーを「難しく使わない」ことを念頭に置いている．それはテクノロジーが苦手であり，かつ数学も苦手な生徒には完全に「二重苦」になってしまうからである.図形領域では，テクノロジーと「現物」，この両者を共存させることで，それぞれの良い面が浮き彫りとなる．そしてこの活用を繰り返すことで，やがてテクノロジーと「現物」の両方が無くても問題の意味するところが考えられる状態に生徒たちは向かっていくものと感じる。

参考・引用文献

垣花京子(2007),「ITの活用で数学教育は変わるか? ～動的図形学習ソフトCabri-Geometryの実践研究から～」科学教育研究 31(1)，日本科学教育学会，pp.62-63

吉田明史(2009),「高等学校の数学教育に求められるもの」日本数学教育学会誌,第91巻 第7号 p.19

池田敏和・馬場裕・橋本吉彦・石谷優行・岩立忠・藤原大樹・橋本吉貴・峰野宏祐・東谷洵・五十嵐潤・前田正男(2011),「算数・数学科における図形についての美しさを感得させる教材開発とその指導」．横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ(教育科学)No.13 pp.17-39

島田浩二(2009),「数学的活動の指導における折り紙の活用についての一考察」第４２回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，pp.199-204

実践１～４

http://www.ishitani.com/の,「日数教当日配付資料」にて詳細を掲載.

尚，本研究は，平成２２・２３・２４年度科学研究費補助金(いずれも奨励研究,研究課題番号22909005・23909003・24909003)の研究助成を受けて進められている.